УДК 621.391.01

АЛГОРИТМЫ ИТЕРАТИВНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА БЛОКОВЫХ ТУРБО-КОДОВ НА ОСНОВЕ КОДОВ С ПРОВЕРКОЙ НА ЧЕТНОСТЬ

Л. Е. Назаров, В. В. Батанов, О. О. Кузнецов

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Фрязинский филиал

Статья получена 17 сентября 2014 г.

Аннотация. Приведены описания и результаты исследования алгоритмов итеративного приема турбо-кодов, формируемых на основе простейших кодов с проверкой на четность.

Ключевые слова: блоковые турбо-коды, алгоритмы итеративного приема, вероятность ошибки.

Abstract. This paper presents the symbol-by-symbol decoding algorithms for serial block turbo-codes (block product codes) based on simple single-parity-check codes.

Key words: block product codes, iterative decoding, word-rate rate.

Введение

Блоковые турбо-коды входят в класс помехоустойчивых кодов, известных в литературе как коды-произведения [1]. Их особенностью является возможность применения при приеме алгоритмов итеративной обработки входных реализаций, обеспечивающих достижение вероятностно-энергетических характеристик, близких к предельным характеристикам, определяемым пропускной способностью каналов передачи [2].

Особенностью рассматриваемых в настоящей статье блоковых турбо-кодов является то, что они формируются на основе простейших блоковых кодов с проверкой на четность с одним проверочным символом. Это определяет низкую сложность результирующих алгоритмов итеративного приема данных турбо-кодов, что обусловливает их применение в системах связи широкого назначения и в системах хранения данных. В частности, они применяются в оптических системах связи и в системах магнитной записи [3,4]. Кроме того, эти блоковые турбо-коды составляют основу класса последовательных турбо-кодов с пониженной сложностью алгоритмов приема по отношению к алгоритмам приема с параллельным объединением рекурсивных сверточных кодов [5,6].

Исследованию свойств рассматриваемых турбо-кодов посвящен ряд работ, в которых приведены описания эффективных алгоритмов итеративного посимвольного приема, характеризуемых высокой производительностью и осуществляющих подоптимальную обработку входных реализаций без оценки энергетического параметра канала передачи [5,6,7,8].

В настоящей статье приведена методика оценивания энергетических потерь при применении данных алгоритмов по отношению к процедуре оптимального приема, реализующей правило максимального правдоподобия [1], приведены оценочные значения энергетических потерь по отношению к теоретическим оценкам и по отношению к более сложному алгоритму приема, требующего знания относительно энергетического параметра канала передачи.

1. Постановка задачи

Помехоустойчивые коды с параметрами (N,K) задаются порождающими матрицами размером $K\times N$ [1]. Здесь N, K - длительность последовательностей символов кодовых слов и информационных символов.

Порождающие матрицы рассматриваемых турбо-кодов эквивалентны двумерной матрице - ее строки и столбцы являются кодовыми словами блоковых кодов C_1, C_2 с параметрами (n_1,n_1-1), (n_2,n_2-1). Коды C_1, C_2 являются простейшими кодами с проверкой на четность с единственным проверочным символом. Длительность кодовых слов этих кодов-произведений равна $N=n_1n_2$, информационный объем равен $K=(n_1-1)(n_2-1)$, кодовая скорость равна $R=K/N$, минимальное расстояние Хэмминга равно $d_{\text{мин}}=4$.

Известен ряд алгоритмов итеративного приема рассматриваемых турбо-кодов [6,7,8]. При применении этих алгоритмов приема не требуется оценка энергетического параметра канала, что упрощает их реализацию. Вместе с тем, более сложные алгоритмы приема, использующие оценки энергетического параметра, являются более эффективными по отношению к вероятностно-энергетическим характеристикам. Суть рассматриваемой проблемы - сравнительный анализ алгоритмов итеративного приема рассматриваемых турбо-кодов путем компьютерного моделирования и теоретического анализа.

2. Алгоритмы итеративного приема турбо-кодов на основе составляющих блоковых кодов с проверкой на четность

Пусть $A=(a_{ij};0\le i<k_1;0\le j<k_2)$ - последовательность информационных символов, образующих матрицу в составе матрицы кодового слова $B=(b_{ij};0\le i<n_1;0\le j<n_2)$ кода-произведения; $\vec{Y}=(y_{ij};0\le i<n_1;0\le j<n_2)$ - реализация на входе декодера, отсчеты которой представляют сумму сигнальной и помеховой компонентов

$$y_{ij}=U(1-2b_{ij})+n_{ij}. \tag{1}$$

Здесь U - амплитуда сигналов с двоичной фазовой манипуляцией (ФМ2), n_{ij} - помеховая компонента аддитивного белого гауссовского шума с односторонней спектральной плотностью N_0.

В работах [5,6,7,8] приведены описания ряда эффективных алгоритмов итеративного посимвольного приема рассматриваемых турбо-кодов. Исследование данных алгоритмов показали, что наиболее эффективным является алгоритм MIN_SUM_BP [7,8], разработанный для приема низкоплотностных кодов. При его использовании не требуется оценка энергетического параметра канала. Возможность применения соответствующего аппарата определяется тем фактом, что рассматриваемые коды-произведения входят в класс низкоплотностных кодов [7,8].

Перед выполнением итерации алгоритма MIN_SUM_BP для посимвольного приема кодового символа b_{ij} производится инициализация величин $\vec{z}_1=(z_{1l}=y_{il};0\le l<n_1)$, $0\le i<n_1$ и $\vec{z}_2=(z_{2l}=y_{lj};0\le l<n_2)$, $0\le j<n_2$. Итерация

включает выполнение следующих шагов обработки последовательностей $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$ [8]:

1) формируются последовательности “жестких” решений $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$: $a_{1l} = 0$, если $z_{1l} \geq 0$, иначе $a_{1l} = 1$ и $a_{2l} = 0$, если $z_{2l} \geq 0$, иначе $a_{2l} = 1$, вычисляются суммы $j_1 = \left(\sum_{l=0}^{n_1 - 1} a_{1l} \right) \bmod 2$, $j_2 = \left(\sum_{l=0}^{n_2 - 1} a_{1l} \right) \bmod 2$;

2) вычисляются значения $\alpha_{1i} = \min_{0 \leq l < n_1, l \neq i} \left(|z_{1l}| \right)$ и $\alpha_{2j} = \min_{0 \leq l < n_2, l \neq j} \left(|z_{2l}| \right)$;

3) вычисляются нормализованные значения L_{1i} и L_{2j} по правилу $L_{1i} = \alpha_{1i} \cdot (-1)^{j_1 + a_{1i}}$, $L_{2j} = \alpha_{2j} \cdot (-1)^{j_2 + a_{2j}}$;

4) для кодового символа b_{ij} вычисляются новые величины $z_{1i} = y_{ij} + L_{1i}$, $z_{2j} = y_{ij} + L_{2j}$.

5) если критерий остановки алгоритма итеративного приема не выполняется, то процесс продолжается с шага 1) итерации. При выполнении критерия остановки итеративной обработки вычисляются величины $z_{ij} = y_{ij} + L_{1i} + L_{2j}$ и принимаются решения относительно значений кодовых символов $b_{ij} = 0$ при условии $z_{ij} > 0$, иначе $b_{ij} = 1$.

Более сложным по отношению к изложенному алгоритму MIN_SUM_BP является алгоритм итеративного посимвольного приема BP (belief propagation) [7]. При использовании алгоритма BP требуется оценка энергетического параметра канала, однако, в общем случае этот алгоритм является более эффективным, чем алгоритм MIN_SUM_BP по отношению к вероятностно-энергетическим характеристикам. Приведем описание алгоритма BP.

Перед выполнением итерации алгоритма BP для посимвольного приема кодового символа b_{ij} производится инициализация величин $\vec{z}_1 = (z_{1l} = \frac{U y_{il}}{N_0}; 0 \leq l < n_1)$, $0 \leq i < n_1$ и $\vec{z}_2 = (z_{2l} = \frac{U y_{lj}}{N_0}; 0 \leq l < n_2)$, $0 \leq j < n_2$.

Итерация включает выполнение следующих шагов обработки последовательностей $\vec{z}_1,\ \vec{z}_2$:

1) вычисляются элементы массивов T_{1i}, T_{2j} и массива L_{1i}, L_{2j}

$$T_{1i} = \prod_{0 \le l < n_1, l \ne i} \frac{1-\exp(z_{1l})}{1-\exp(z_{1l})}, \tag{2}$$

$$T_{2j} = \prod_{0 \le l < n_2, l \ne j} \frac{1-\exp(z_{2l})}{1-\exp(z_{2l})}, \tag{3}$$

$$L_{1i} = \ln\left(\frac{1-T_{1i}}{1+T_{1i}}\right), \tag{4}$$

$$L_{2j} = \ln\left(\frac{1-T_{2j}}{1+T_{2j}}\right). \tag{5}$$

2) для кодового символа b_{ij} вычисляются новые величины $z_{1i} = y_{ij} + L_{1i}$, $z_{2j} = y_{ij} + L_{2j}$.

5) если критерий остановки алгоритма итеративного приема не выполняется, то процесс продолжается с шага 1) итерации. При выполнении критерия остановки итеративной обработки вычисляются величины $z_i = y_i + L_{1i_i} + L_{2i}$ и принимаются решения относительно значений кодовых символов $b_{ij} = 0$ при условии $z_{ij} > 0$, иначе $b_{ij} = 1$.

3. Методики оценивания вероятностных характеристик посимвольного приема турбо-кодов на основе составляющих кодов с проверкой на четность

Точное вычисление вероятностных характеристик (вероятность ошибочного приема кодовых слов $P_{\text{ош}}$, вероятность ошибочного приема информационных битов $P_{\text{б}}$) при оптимальном приеме сигналов представляет сложную проблему [1]. Аналитические выражения относительно $P_{\text{ош}}$ при наличии канального аддитивного белого гауссовского шума и при реализации правила максимального приема известны лишь для ограниченного класса ансамблей сигналов, включающего ансамбли ортогональных и биортогональных сигналов, ансамбли симплексных сигналов. Более сложной является задача оценивания вероятностных характеристик для оптимального посимвольного приема [9,10].

Вследствие этого оценивание вероятностных характеристик исследуемых ансамблей сигналов производится с использованием формульных соотношений, определяющих верхние границы вероятностей $P_{б}$ и $P_{ош}$. Для ансамблей сигналов известны верхние границы $P_{ош}$, наиболее используемой из которых является аддитивная граница [1]. Более точной по отношению к аддитивной границе является мультипликативная граница при эквивалентной сложности их вычисления, которая применяется для сигналов с манипуляцией ФМ2 на основе линейных блоковых двоичных кодов [11]

$$P_{ош} \le 1 - \prod_{d=1}^{N} F^{A(d)}\left(\sqrt{\frac{E_{б}k}{N_0}\frac{2d}{N}}\right). \qquad (6)$$

Здесь $E_{б}$ - энергия сигналов на бит, $A(d)$ - количество кодовых слов с весом Хэмминга d, N - длительность кодовых слов.

Известно соотношение, определяющее связь $P_{б}$ и $P_{ош}$ [1]

$$P_{б} \cong P_{ош}\frac{d_{мин}}{N}. \qquad (7)$$

Соотношения (6), (7) используются для оценивания вероятностей ошибочных решений для алгоритмов оптимального приема, реализующих правило максимального правдоподобия и правило посимвольного приема соответственно.

При вычислении соотношения (6) необходимо знание спектра расстояний Хэмминга $A(d)$. Для рассматриваемых турбо-кодов относительно $A(d)$ известно выражение [5]

$$A(d) = 2^{-n_1}\sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^{i}\left[\sum_{m=0,m-\text{четное}}^{n_1} P_m(i,n_1)h^d\right]^{n_2}, \qquad (8)$$

$$P_m(i,n) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_i^k C_{n-i}^{m-k}. \qquad (9)$$

Количество кодовых слов $A(d)$ с расстоянием Хэмминга d соответствует множителю при слагаемом h^d в многочлене (8).

Альтернативу изложенной методике оценивания вероятностных характеристик ансамблей сигналов представляет компьютерное моделирование соответствующих алгоритмов приема. При его выполнении производится интервальная оценка вероятности $P_{\text{ош}}$ путем вычисления частости $w = \frac{x}{u}$. Здесь x - число ошибочных решений в последовательности независимых вычислительных экспериментов объемом u.

Требуемое количество вычислительных экспериментов u определяется размером доверительного интервала, вероятностью $P_{\text{ош}}$, доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$. При условии $u >> 1$ справедливо соотношение [12]

$$P_{\text{дов}}(|w - P_{\text{ош}}| < \alpha) \cong 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{P_{\text{ош}}(1 - P_{\text{ош}})/u}}\right), \tag{10}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp(-y^2/2) dy.$$

Например, для $P_{\text{ош}} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.5P_{\text{ош}}$ (доверительный интервал $[0.5P_{\text{ош}}, 1.5P_{\text{ош}}]$), $P_{\text{дов}} = 0.95$ требуемое количество экспериментов, вычисленное с использованием (10), оценивается значением u >1540000.

4. Результаты моделирования

Для ряда рассматриваемых блоковых турбо-кодов произведено компьютерное моделирование приведенных алгоритмов итеративного посимвольного приема MIN_SUM_BP и BP с целью оценки вероятностных характеристик и их сравнительного анализа. При моделировании выполнялись условия относительно требуемого количества экспериментов u, задаваемого соотношением (10) в зависимости от оцениваемого значения $P_{\text{ош}}$ для параметров $\alpha = 0.5P_{\text{ош}}$, $P_{\text{дов}} = 0.95$. Показано, что применение 20 итераций обеспечивает сходимость вероятностных характеристик.

Результаты моделирования показали, что приведенные алгоритмы итеративного посимвольного приема MIN_SUM_BP и BP рассматриваемых турбо-кодов эквивалентны относительно их вероятностно-энергетических характеристик для АБГШ канала.

В качестве примера на рис.1 приведены полученные зависимости вероятности ошибки на бит $P_б$ и вероятности ошибки на кодовое слово $P_{ош}$ от отношения сигнал/помеха $\frac{E_б}{N_0}$ при применении рассмотренных алгоритмов итеративного приема для турбо-кода, формируемого на основе блокового кода с проверкой на четность (10,9): длительность кодовых слов равна $N = 100$, информационный объем равен $K = 81$ при наличии АБГШ. Единая кривая 1 и кривая 2 относятся к случаю применения алгоритмов итеративного приема MIN_SUM_BP и BP и соответствуют вероятности ошибки на информационный бит $P_б$ и на кодовое слово $P_{ош}$.

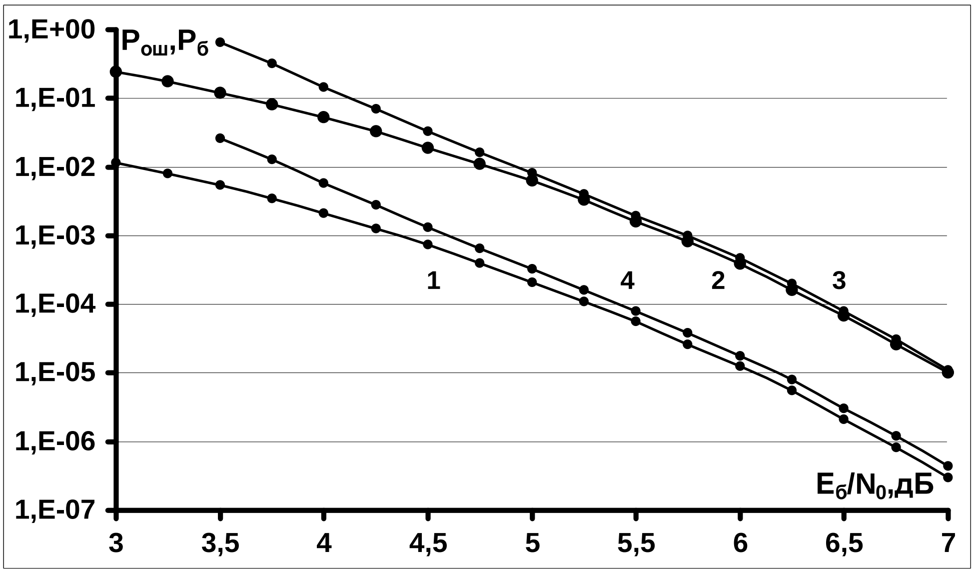

Рис.1. Вероятности ошибки на бит $P_б$ (кривая 1) и вероятности ошибки на кодовое слово $P_{ош}$ (кривая 2) при применении алгоритмов итеративного приема MIN_SUM_BP и BP для турбо-кода на основе блокового кода с проверкой на четность (10,9) при наличии АБГШ: 3 - верхняя мультипликативная граница для $P_{ош}$; 4 - верхняя граница для $P_б$.

Кривая 3 и кривая 4 на рис.1 соответствуют верхней мультипликативной границе для вероятности ошибки на кодовое слово $P_{\text{ош}}$ (6) и границе для вероятности ошибки на информационный бит $P_{\text{б}}$ (7) для рассматриваемого турбо-кода. Вычисление спектра расстояний Хэмминга $A(d)$ произведено с использованием соотношений (8), (9). Вид спектра приведен на рис.2, количество кодовых векторов с минимальным расстоянием Хэмминга $d_{\text{мин}} = 4$ равно 2025.

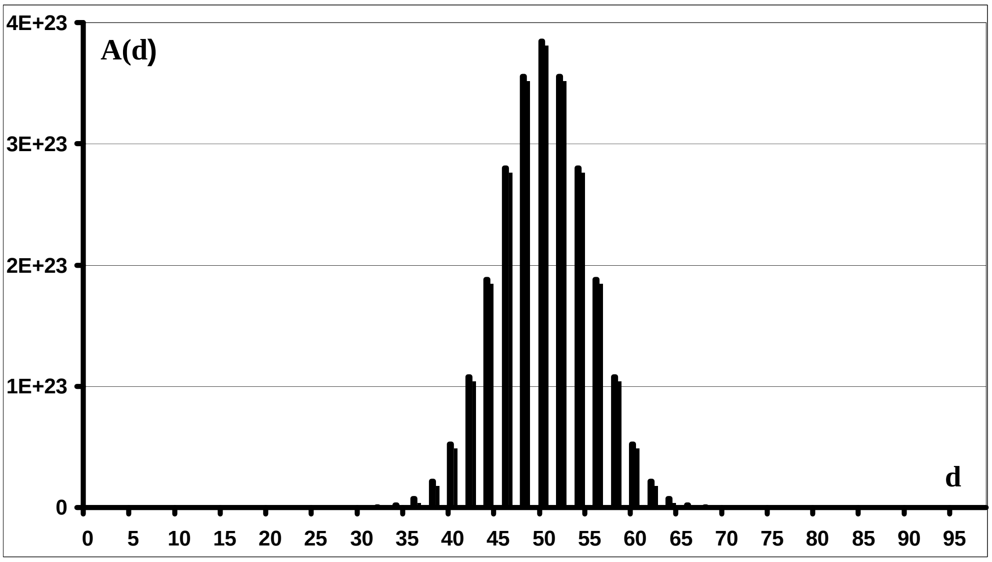

Рис.2. Спектр расстояний Хэмминга $A(d)$ турбо-кода, формируемого на основе блокового кода с проверкой на четность (10,9): длительность кодовых слов $N = 100$, информационный объем $K = 81$ (количество кодовых векторов с минимальным расстоянием Хэмминга $d_{\text{мин}} = 4$ равно 2025).

Видно, что вероятностные кривые, полученные путем моделирования, практически совпадают с теоретическими вероятностными кривыми. Это доказывает эффективность алгоритмов итеративного приема MIN_SUM_BP и BP для рассматриваемых турбо-кодов на основе составляющих кодов с проверкой на четность.

На рис.3 приведены вероятностные характеристики алгоритмов итеративного приема MIN_SUM_BP и BP для турбо-кода на основе блокового кода с проверкой на четность (10,9) при наличии АБГШ и при релеевских замираниях сигналов. Кривые получены путем моделирования алгоритмов приема. По оси абсцисс отложены средние значения сигнал/помеха. Кривая 1 и кривая 2 соответствуют вероятностям ошибки на бит $P_б$ для алгоритма BP и для алгоритма MIN_SUM_BP, полагая известным энергетический параметр канала $\frac{U}{N_0}$. Кривая 3 и кривая 4 соответствуют вероятностям ошибки на кодовое слово $P_{ош}$ для алгоритма BP и для алгоритма MIN_SUM_BP. Видно, что в этом случае энергетический проигрыш при применении алгоритма MIN_SUM_BP по отношению к алгоритму BP достигает 0.8 дБ.

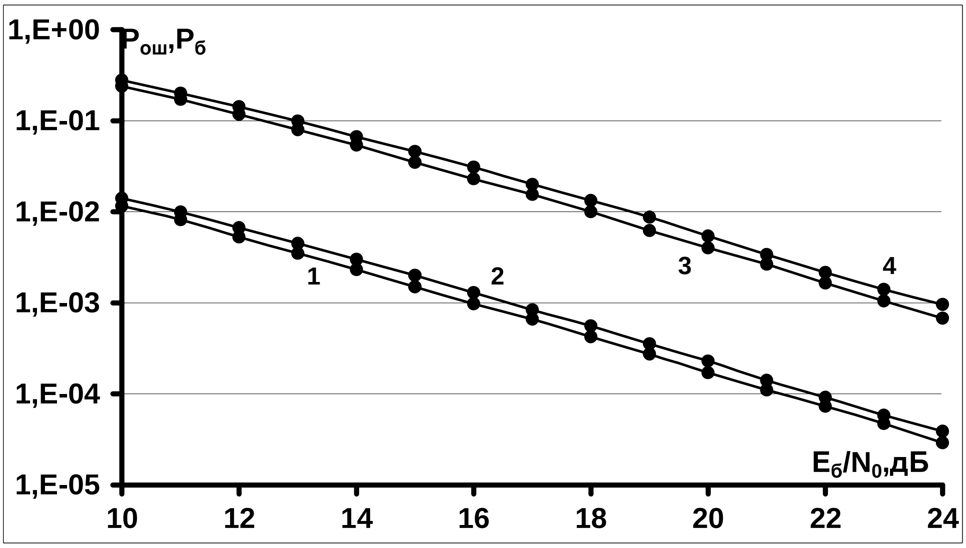

Рис.3. Вероятностные характеристики алгоритмов итеративного приема для турбо-кода на основе блокового кода с проверкой на четность (10,9) при наличии АБГШ и при релеевских замираниях сигналов (по оси абсцисс отложены средние значения сигнал/помеха): 1 - вероятности ошибки на бит $P_б$ для алгоритма BP; 2 - вероятности $P_б$ для алгоритма MIN_SUM_BP; 3 - вероятности ошибки на кодовое слово $P_{ош}$ для алгоритма BP; 4 - вероятности ошибки $P_{ош}$ для алгоритма MIN_SUM_BP.

Заключение

Приведены описания алгоритмов MIN_SUM_BP и BP (belief propagation) итеративного приема турбо-кодов, формируемых на основе простейших блоковых кодов с одним проверочным символом.

Приведены методики оценивания вероятностных характеристик рассматриваемых турбо-кодов при использовании алгоритмов их итеративного приема.

Путем моделирования для ряда турбо-кодов показано, что алгоритм итеративного приема MIN_SUM_BP без оценки энергетического параметра канала и алгоритм итеративного приема BP, требующего оценок энергетического параметра канала передачи, эквивалентны относительно их вероятностных характеристик при наличии АБГШ. Вероятностные характеристики этих алгоритмов итеративного приема практически совпадают с теоретическими вероятностными характеристиками оптимального приема, реализующего критерий максимального правдоподобия.

Для канала с релеевскими замираниями сигналов и АБГШ энергетический проигрыш при применении алгоритма MIN_SUM_BP по отношению к алгоритму BP, требующему знания относительно энергетического параметра канала передачи, достигает 0.8 дБ.

Литература

1. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир. 1976. 594 с.

2. Hagenauer J., Offer E., Papke L. Iterative decoding of binary block and convolutional codes. // IEEE Transactions on Information Theory. 1996. V.IT-42. N2. P.429-448.

3. Farhadi G., Jamali S.H. Performance Analysis of Fiber-Optic BPPM CDMA Systems With Single Parity-Check Product Codes. // IEEE Transactions on Communications. 2006. V.54. N9. P.1643-1653.

4. Li J., Narayanan R., Kurtas E., Georghiades C.N. On the Performance of High-Rate TPC/SPC Codes and LDPC Codes Over Partial Response Channels. // IEEE Transactions on Communications. 2002. V.50. N5. P.723-734.

5. Jing Li., Narayanan R., Georghiades .N. Product accumulate codes: a class of codes with near-capacity performance and low decoding complexity. // IEEE Transactions on Information Theory. 2004. V.50. N1. P.31-46.

6. Назаров Л.Е., Головкин И.В. Последовательные высокоскоростные турбо-коды с пониженной сложностью алгоритмов приема. // Радиотехника и электроника. 2010. Т.55. №10. Стр.1193-1199.

7. Ping Li, Chan S., Yeng K.L. Efficient soft-in-soft-out sub-optimal decoding rule for single parity check codes. // Electronic Letters. 1997. V.33. N19. P.1614-1616.

8. Назаров Л.Е., Головкин И.В. Алгоритмы итеративного декодирования кодов-произведений с проверкой на четность. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2011. №1. URL: http://jre.cplire.ru/jan11/3/text.pdf

9. Назаров Л.Е. Вероятностные характеристики при оптимальном посимвольном приеме сигналов, соответствующих двоичным блоковым кодам. // Радиотехника и электроника. 1999. Т.44. №10. Стр. 1231-1235.

10. Назаров Л.Е., Головкин И.В. Границы ошибки при посимвольном приеме сигналов на основе линейных блоковых кодов. // Известия Вузов. Электроника. 2009. №5. Стр.44-49.

11. Смольянинов В.М., Назаров Л.Е. Мультипликативная граница вероятности правильного распознавания при когерентном приеме. // Радиотехника и электроника. 1987. Т.32. №2. Стр. 446-449.

12. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы. 1955. 556 с.